# Loi de groupe sur une hyperbole

Le plan usuel $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$.

On note $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation cartésienne $x^2 - 3y^2 = 1$.

1.a Préciser les coordonnées des sommets $A$ et $A'$ de l'hyperbole $\mathcal{H}$
( $A$ désignant le sommet d'abscisse positive et $A'$ l'autre).

1.b Déterminer l'excentricité $e$ de l'hyperbole $\mathcal{H}$.

2. On munit le plan $\mathcal{P}$ d'une loi de composition interne notée $\star$ qui aux points $M$ et $M'$ de coordonnées $(x, y)$ et $(x', y')$ associe le point $N = M \star M'$ de coordonnées $(\alpha, \beta)$ définies par : $\begin{cases} \alpha = xx' + 3yy' \\ \beta = xy' + yx' \end{cases}$.

Montrer que la loi $\star$ est associative, commutative et qu'elle possède un élément neutre qu'on précisera.

3. On considère l'application $F$ de $\mathcal{P}$ vers $\mathbb{R}$ qui au point $M$ de coordonnées $(x, y)$ associe $F(M) = x^2 - 3y^2$.

3.a Quel est l'ensemble des points $M$ du plan tels que $F(M) = 0$ ? $F(M) = 1$ ?.

3.b Soit $M$ et $M'$ deux points du plan. Etablir que $F(M \star M') = F(M)F(M')$.
En déduire que si $M$ et $M'$ appartiennent à $\mathcal{H}$, il en est de même de $M \star M'$.

4.a Montrer que la loi $\star$ munit l'ensemble $\mathcal{H}$ d'une structure de groupe commutatif et que le symétrique d'un point $M$ de $\mathcal{H}$ pour la loi $\star$ est le symétrique de $M$ par rapport à l'axe $(Ox)$.

4.b Soit $M$ et $M'$ deux points distincts de $\mathcal{H}$, non symétriques par rapport à $(Ox)$ et $N = M \star M'$.
Montrer que la droite $(MM')$ est parallèle à la droite $(IN)$.

4.c Soit $M$ un point de $\mathcal{H}$ et $N = M \star M$.
Montrer que la droite $(IN)$ est parallèle à la tangente en $M$ à $\mathcal{H}$.

4.d En déduire un procédé géométrique de construction du composé par $\star$ de deux points de $\mathcal{H}$.